

GROSSER BELEG  
*Approximation der Feigenbaumkonstante*  
HANS-PETER STÖRR



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik

Großer Beleg

zum Thema

*Approximation der  
Feigenbaumkonstante*

von

Hans-Peter Störr

geboren am 3.4.1972 in Zwickau

Eingereicht am

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. habil. E. Stoschek



## **Zusammenfassung**

In dieser Arbeit wird ein Überblick über verschiedene Methoden zur Berechnung der Feigenbaumkonstanten  $\alpha$  und  $\delta$  gegeben, und eine neue Methode zur Berechnung von  $\delta$  aufgezeigt. Die genauesten bisher publizierten Resultate (Keith Briggs in [2]) von 108 bzw. 85 Stellen konnten mit Hilfe einer Implementation dieser Methode auf jeweils 435 Stellen verbessert werden.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2. Die Feigenbaumkonstante</b>	<b>3</b>
<b>3. Direkte Berechnung der Bifurkationspunkte</b>	<b>9</b>
3.1 Berechnung der Bifurkationspunkte . . . . .	9
3.2 Bestimmung der Konstanten . . . . .	10
3.3 Resultate der Berechnung . . . . .	12
<b>4. Darstellung über eine Funktionalgleichung</b>	<b>13</b>
4.1 Gradientenabstieg . . . . .	14
4.2 Newtonverfahren . . . . .	15
<b>5. Die zweidimensionale Funktionalgleichung</b>	<b>17</b>
<b>6. Resultate</b>	<b>20</b>
<b>A. Newtonverfahren für Bifurkationspunkte</b>	<b>22</b>
<b>B. Newtonverfahren für Funktionalgleichung I</b>	<b>25</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>27</b>
<b>Index</b>	<b>29</b>





# 1. Einführung

Obwohl über die Feigenbaumkonstante bereits 1978 in [5] zum ersten mal publiziert wurde, ist über sie immer noch recht wenig bekannt. Man weiß nicht, ob sie rational, irrational oder transzendent ist, man kennt nicht ihre Beziehungen zu anderen mathematischen Konstanten, ja man hat nicht einmal effiziente Methoden zu ihrer Berechnung. Daher ist eine genaue Berechnung dieser Konstante wünschenswert, um neue Beziehungen finden zu können.

Feigenbaum gab für  $\delta$  in [6] 5 und später in [7] 17 Stellen an. Dies wurde von Christiansen, Cvitanović und Rugh in [4] auf 26 Stellen verbessert. Das genaueste publizierte Resultat von 85 Stellen ist in [2] zu finden. Briggs hat später erneut Berechnungen mit vergrößerter Genauigkeit durchgeführt; das Berechnungsprotokoll ist im WWW unter

<http://www.pd.uwa.edu.au/Keith/f.2>

zu finden. Die Berechnung wurde dort mit 578 Stellen durchgeführt, es finden sich aber leider keine expliziten Angaben über die Genauigkeit des Resultats. Nach dem Protokoll läßt sich eine Genauigkeit von maximal 360 Stellen vermuten; der Vergleich mit den in dieser Arbeit ermittelten Resultaten ergibt eine Genauigkeit von 345 Stellen für Briggs Berechnung, was gut mit diesem Wert übereinstimmt.

In dieser Arbeit werden einige Ideen zur Berechnung der Feigenbaumkonstante dargestellt, und die Resultate, die bei der Implementation eines Teils davon erzielt wurden. Der Schwerpunkt liegt auf der näherungsweise Lösung der Cvitanović-Feigenbaum-Funktionalgleichung (siehe Kapitel 4) und der Ableitung und Lösung einer neuen Funktionalgleichung aus einer in [14, 8] beschriebenen zweidimensionalen Variante der Cvitanović-Feigenbaum-Funktionalgleichung (Kapitel 5). Diese Gleichung bietet nach Meinung des Autors einen besseren Weg zum Erreichen hoher Präzision, als die in [6] von Feigenbaum begründete Methode (siehe Seite 17), nach der die bisher genauesten Berechnungen vorgenommen wurden. Die Anzahl

## 1. *Einführung*

der bekannten Stellen von  $\alpha$  und  $\delta$  wurde dadurch auf 435 erhöht.

## 2. Die Feigenbaumkonstante

In diesem Kapitel wird die Feigenbaumkonstante definiert, und ihre Bedeutung beschrieben.

Mitchell Feigenbaum und andere Forscher beschäftigten sich in den 70er Jahren mit dem Verhalten der sog. *logistischen Gleichung*. Diese hat die folgende Form:

$$x_{n+1} = a * x_n * (1 - x_n)$$

Sie stellt ein sehr einfaches Modell dar für ein Bevölkerungswachstum bei begrenzten Ressourcen:  $x_n$  sei die Bevölkerung in der n-ten Generation, und  $x_{n+1}$  die Bevölkerung in der n+1-ten.  $a$  ist ein Parameter für die Geschwindigkeit des Wachstums. (Im folgenden werde ich diese Funktion mit  $f(x)$  bezeichnen.)

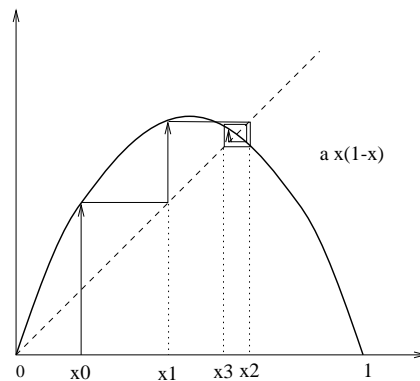


Abbildung 2.1: Die logistische Gleichung

Die Bevölkerungsgröße ist auf das Intervall  $[0, 1]$  normiert, wobei 1 die maximal erreichbare Dichte ist. Im Diagramm 2.1 ist der Verlauf dieser Funktion dargestellt. Wenn die Bevölkerung gering ist, dann wird die nächste

Generation  $a$  mal so groß sein. Wenn die Bevölkerung aber bereits sehr groß ist, machen sich Ressourcenbegrenzungen bemerkbar. Dies schränkt zunächst das Bevölkerungswachstum ein, und führt im Extremfall (also der Dichte 1) zur Hungerkatastrophe, so daß die Bevölkerung ganz verschwinden würde. Untersucht wird nun die Folge der  $x_i$  in Abhängigkeit von  $a$ .

Das ist natürlich nicht gerade ein wirklichkeitsnahes Modell. Was aber zum damaligen Zeitpunkt sehr überraschend war, ist, daß bereits ein so einfaches Modell ein äußerst komplexes Verhalten zeigen kann.

Wenn man einen relativ kleinen Wert von  $a$  nimmt ( $a < 3$ ), dann ergibt sich ein einfaches Einschwingen auf einen Gleichgewichtswert. Dies ist im Diagramm 2.1 bereits dargestellt. Wenn  $a$  dagegen größer als 3 wird, ändert sich das Verhalten: die Bevölkerungsgröße wird instabil und springt zwischen zwei Werten hin und her (Diagramm 2.2). Bei  $a > 3.4495$  entsteht ein Viererzyklus.

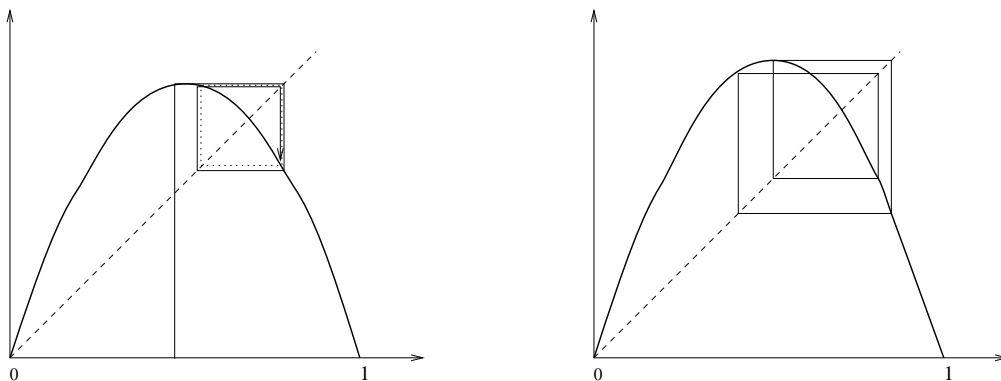


Abbildung 2.2: Der Zweier- und der Viererzyklus

Diese *Periodenverdopplung* wiederholt sich in immer kürzeren Abständen. Dies läßt sich in Diagramm 2.3 gut erkennen. Abgetragen sind darin die Punkte des Zyklus, auf den sich die Bevölkerung einschwingt, gegen den Wert  $a$ , mit dem die Iteration durchgeführt wird.

Die Punkte, an denen die Periodenverdopplung stattfindet, werden auch *Bifurkationen* (Gabelungen) genannt. Diese erfolgen immer schneller, bis schließlich eine Grenze des Chaos erreicht wird. Im Original ist dies in Diagramm 2.5 auf Seite 8 zu sehen.

Feigenbaum stellte nun fest, daß die Abstände aufeinanderfolgender Bi-

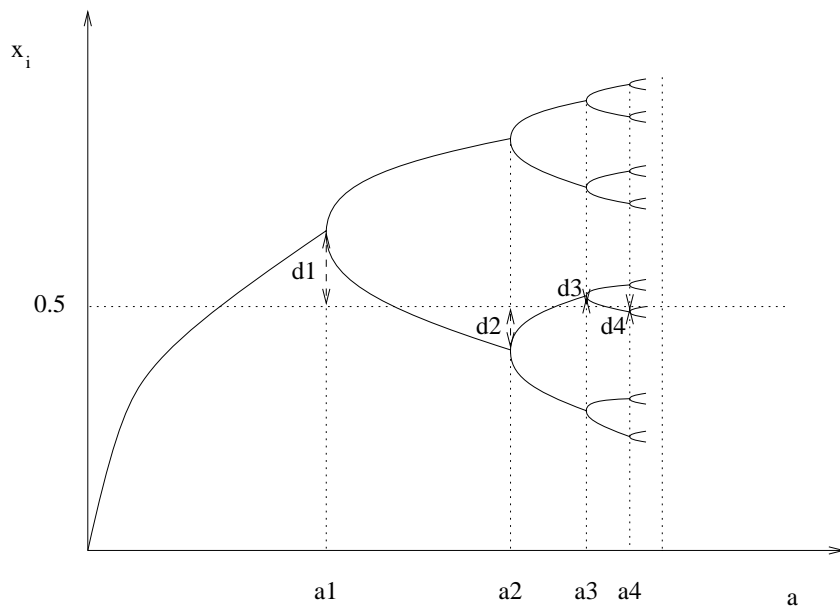


Abbildung 2.3: Ein Bifurkationsdiagramm (nichtmaßstäblich)

furkationen näherungsweise eine fallende geometrische Folge bilden. Ihr Quotient konvergiert gegen den Grenzwert  $\delta$ , der als *Feigenbaumkonstante* bezeichnet wird.

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+2} - a_{k+1}} \quad (2.2.1)$$

$$\delta = 4.6692016 \dots$$

Verwandt dazu ist der Grenzwert  $\alpha$ :

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1} - d_k}{d_{k+2} - d_{k+1}} \quad (2.2.2)$$

$$\alpha = 2.502907875 \dots$$

Dabei bezeichnen die  $a_k$  diejenigen Werte für  $a$ , bei denen die  $k$ -te Bifurkation stattfindet, d.h. bei denen die Iteration der logistischen Gleichung von einem  $2^{k-1}$ -Zyklus zu einem  $2^k$ -Zyklus übergeht, und die  $d_k$  den Abstand des Punktes, an dem  $ax(1-x)$  ihr Maximum hat (d.h.  $x=0.5$ ), zur nächsten „Gabelung“.

Alternativ lassen sich die Feigenbaumkonstanten auch durch die sog. *superstabilen Zyklen* definieren (siehe Diagramm 2.4 auf der nächsten Seite).

## 2. Die Feigenbaumkonstante

Ein superstabiler Zyklus ist ein Zyklus, der das Maximum von  $ax(1-x)$  bei  $x_m = 0.5$  einschließt. Dies bewirkt, daß die Iteration sich sehr schnell auf den Zyklus einstellt.

$A_k$  ist dementsprechend der Wert für  $a$ , an dem ein superstabiler  $2^k$ -Zyklus entsteht, und  $D_k = f^{2^{k-1}}(x_m) - f(x_m)$  ein Maß für die Breite der Gabelung in Umgebung des Maximums.

Hieraus ergeben sich die Feigenbaumkonstanten zu

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1} - A_k}{A_{k+2} - A_{k+1}} \quad (2.2.3)$$

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_{k+1} - D_k}{D_{k+2} - D_{k+1}} \quad (2.2.4)$$

$$(2.2.5)$$

Es läßt sich leicht nachweisen, daß die beiden Definitionen äquivalent sind. (Siehe z.B. [13]).

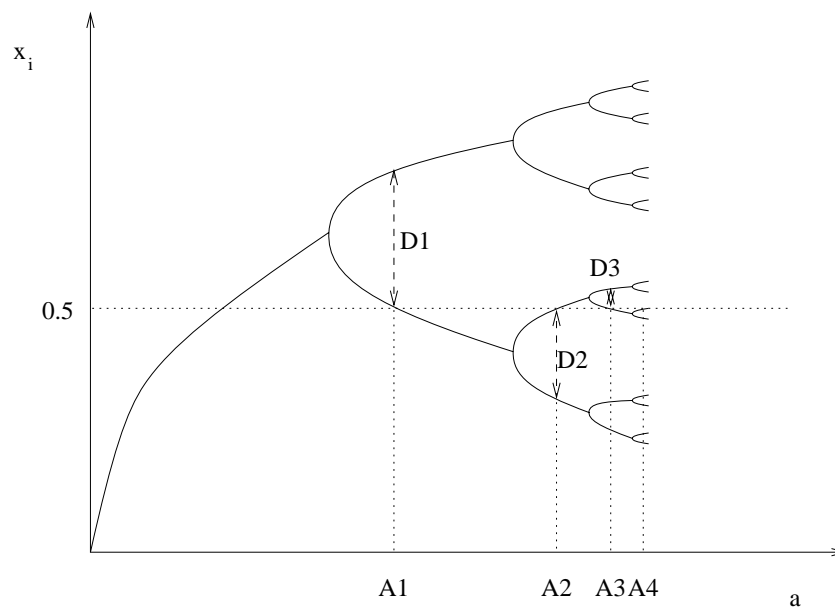


Abbildung 2.4: Die superstabilen Zyklen

Das Interessante an diesen Grenzwerten ist, daß deren Zahlenwerte nicht nur für die logistische Gleichung zutreffen, sondern auch für viele andere

Funktionen, so z.B.  $a * \sin(\pi x)$  oder  $\frac{ax}{(1+x)^b}$  für  $b > 2$ . Tatsächlich gelang es Feigenbaum [7] zu zeigen, daß dies für jede Funktion  $f(x)$  gilt, die folgende Bedingungen erfüllt:

1.  $f(x)$  ist eine stetige Funktion, die das Intervall  $[0, 1]$  auf  $[0, 1]$  abbildet
2.  $f(x)$  hat ein quadratisches Maximum (d.h.  $f''(x_m) \neq 0$ )
3.  $f(x)$  ist monoton steigend in  $[0, x_m)$  und monoton fallend in  $(x_m, 1]$
4.  $f(x)$  hat eine negative Schwarzsche Ableitung  $\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$

Diese *Universalität* macht die Bedeutung der Konstanten aus. Tatsächlich werden derartige Bifurkationen bei physikalischen Erscheinungen beobachtet, bei den ein Übergang von statischem Verhalten über Schwingungen zum Chaos erfolgt. Dies ist z.B. bei der Bérnard-Konvektion, beim parametrisch erregten Pendel, oder bei periodisch erregten nichtlinearen Schwingkreisen (Chua's Circuit) der Fall. Dabei konnten experimentiell die oben angegebenen Werte im Rahmen der Meßgenauigkeit bestätigt werden ([10]). Das Problem dabei ist, das  $\delta$  relativ groß ist, so daß man meist höchstens bis zur 4. oder 5. Periodenverdoppelung messen kann.

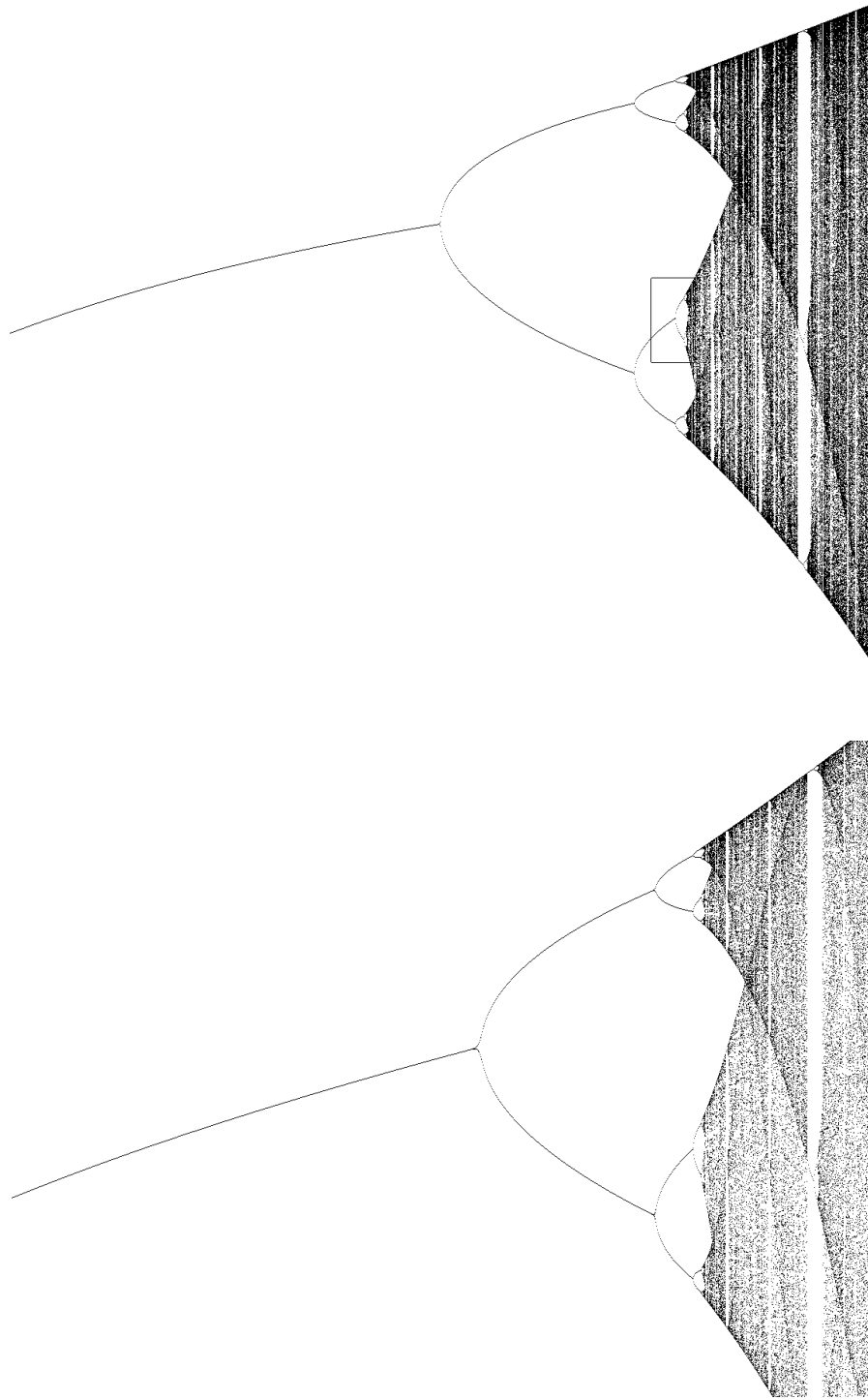


Abbildung 2.5: Ein Bifurkationsbaum mit Ausschnittsvergrößerung



# 3. Direkte Berechnung der Bifurkationspunkte

Die naheliegendste Methode ist es, die Feigenbaumkonstante direkt aus ihrer Definition zu berechnen. Es sind dazu zwei Grundprobleme zu lösen:

1. Die effiziente Bestimmung der Bifurkationspunkte,
2. Die Ermittlung der Konstanten aus diesen Punkten.

Der zweite Punkt ist getrennt aufgeführt, da hier Maßnahmen zur Konvergenzbeschleunigung greifen können.

## 3.1 Berechnung der Bifurkationspunkte

Im folgenden bezeichne ich  $ax(1-x)$  als  $f(x, a)$  bzw. als  $f(x)$ , wenn  $a$  aus dem Zusammenhang hervorgeht. Mit  $f^n(x)$  ist  $\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_n$  gemeint.

Um einen Bifurkationspunkt auszurechnen, ist die naive Methode, einfach die logistische Parabel zu iterieren und zu schauen, wie das Ergebnis für verschiedene  $a$  konvergiert, natürlich zu aufwendig, da die Iteration nur linear konvergiert, und gerade in der Nähe der interessanten Bifurkationspunkte extrem schlecht konvergiert<sup>1</sup>. Es ist also eine gezieltere Methode notwendig.

Hilfreich ist dabei die Betrachtung des Bifurkationsvorgangs. Entsprechend dem Diagramm 3.1 findet dieser genau dann statt, wenn  $\frac{d}{dx} f^{2^n}(x) = -1$ .

---

<sup>1</sup>Wenn man statt dessen nach den superstabilen Zyklen sucht, dann tritt bei der Iteration zwar sogar quadratische Konvergenz ein, aber dies sagt noch nicht, wie man den korrekten Wert für  $a$  findet.

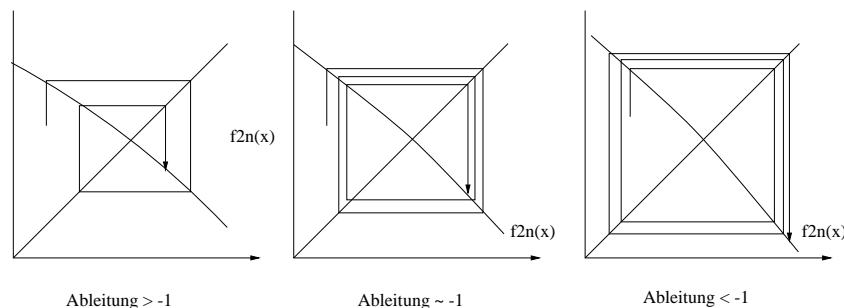


Abbildung 3.1: Ein Bifurkationsvorgang

Damit haben wir aber bereits ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen zur Berechnung der zwei Parameter  $x$  und  $a$  des Bifurkationspunktes:

$$f^{2^n}(x, a) = x \quad (\text{der Zyklus schließt sich}) \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f^{2^n}(x, a) = -1 \quad (\text{eine Bifurkation findet statt.}) \quad (3.3.2)$$

Zur Lösung derartiger nichtlinearer Gleichungssysteme stehen zahlreiche Verfahren zur Verfügung (siehe z.B. in [9]), da es sich aber hier die Ableitungen der Funktionen nach den Unbekannten  $x$  und  $a$  relativ leicht berechnen lassen, bietet sich dabei vor allem das zweidimensionale Newton-Verfahren an. Eine Beschreibung der Formeln, nach denen dieses implementiert wurde, ist in Anhang A auf Seite 22 zu finden.

## 3.2 Bestimmung der Konstanten

Damit ist nun eine Folge von Werten  $x_i$  und  $a_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gewonnen. Unter Anwendung der Definition von  $\alpha$  und  $\delta$  ergeben sich daraus die Folgen  $\alpha_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i+2}}$  und  $\delta_i = \frac{a_i - a_{i+1}}{a_{i+1} - a_{i+2}}$ .

Es ist jedoch zu bemerken, daß sowohl die  $\alpha_i$ , als auch die  $\delta_i$ , näherungsweise die Glieder einer geometrische Folge  $\alpha_i = \alpha + r_\alpha q_\alpha^i$  bzw.  $\delta_i = \delta + r_\delta q_\delta^i$  bilden, die gegen  $\alpha$  bzw.  $\delta$  konvergiert. Dies läßt sich zur Steigerung der Genauigkeit ausnutzen.

Im Folgenden beziehe ich mich der Übersicht halber nur auf die Folge  $\delta_i$ , die Ergebnisse sind aber unmittelbar auf die Folge  $\alpha_i$  übertragbar.

Angenommen man hat 3 aufeinanderfolgende Glieder  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$  einer geometrischen Folge  $a_k = a + rq^k$ , d.h.  $a_i = a + rq^i$ ,  $a_{i+1} = a + rq^{i+1}$ ,  $a_{i+2} = a + rq^{i+2}$ . Damit ist

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{rq^{i+2} - rq^{i+1}}{rq^{i+1} - rq^i} \\
 &= \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} \quad \text{sowie} \\
 qa_i - a_{i+1} &= a(q - 1) \\
 \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} a_i - a_{i+1} &= a \left( \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} - 1 \right) \\
 \frac{a_{i+2}a_i - a_{i+1}a_i - a_{i+1}^2 + a_i a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} a_i &= a \frac{a_{i+2} - a_{i+1} - a_{i+1} + a_i}{a_{i+1} - a_i}
 \end{aligned}$$

also:

$$a = \frac{a_{i+2}a_i - a_{i+1}^2}{a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}}$$

und damit ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{a_{i+2}a_i - a_{i+1}^2}{a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}} \quad \text{für ein beliebiges } i \in \mathbb{N} \quad (3.3.3)$$

Wenn man diese Gleichung also auf 3 beliebige aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge anwendet, so erhält man den Grenzwert dieser Folge.

Wenn man Gleichung (3.3.3) nun sukzessive auf  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_3, \delta_4, \delta_5$  usw. anwendet, erhält man eine neue Folge, die ich mit  $\delta_1^1, \delta_2^1, \delta_3^1, \dots$  bezeichne. Wäre  $(\delta_i)$  nun genau eine geometrische Folge, dann wären alle Glieder dieser Folge gleich  $\delta$ . Da sie das aber nur näherungsweise ist, bilden die  $\delta_i^1$  wieder eine Folge, die gegen  $\delta$  konvergiert. Es stellt sich heraus, dass dies wieder näherungsweise eine geometrische Folge bildet, die aber viel schneller als die Ausgangsfolge konvergiert. Damit kann ich das gleiche Verfahren nochmals anwenden, was zu einer neuen Folge  $(\delta_i^2)$  führt, die schneller als  $(\delta_i)$  und  $(\delta_i^1)$  konvergiert, und so weiter. Es resultiert ein Dreieck

$$\begin{array}{cccccccc}
 \delta_1^0 & \delta_2^0 & \delta_3^0 & \delta_4^0 & \delta_5^0 & \delta_6^0 & \delta_7^0 & \delta_8^0 & \dots \\
 & & \delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1 & \delta_4^1 & \delta_5^1 & \delta_6^1 & \dots \\
 & & & \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & & \dots \\
 & & & & & \delta_1^3 & \delta_2^3 & & \dots \\
 & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

mit

$$\delta_i^0 = \delta_i$$
$$\delta_i^{k+1} = \frac{\delta_{i+1}^k - \delta_i^k \delta_{i+2}^k}{\delta_i^k - 2\delta_{i+1}^k + \delta_{i+2}^k}$$

Aufgrund der begrenzten Genauigkeit der  $\delta_i$  läßt sich dies allerdings nicht weiter als bis zur 4. oder 5. Zeile fortsetzen, da sich die Rechenfehler von Zeile zu Zeile akkumulieren.

### 3.3 Resultate der Berechnung

Realisiert wurde dieses Verfahren mit Hilfe des Mathematikprogramms PARI-GP von C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen and M. Olivier. Bei einer Rechenzeit von mehreren Tagen wurden die Bifurkationspunkte 1 bis 24 zu 60 Stellen Genauigkeit berechnet, um Rundungsfehler zu vermeiden. Daraus ergeben sich ohne Konvergenzbeschleunigung zunächst etwa 15 Stellen für  $\alpha$  und  $\delta$ , mit Hilfe der Konvergenzbeschleunigung konnte die Genauigkeit auf 28 Stellen gesteigert werden.

## 4. Darstellung über eine Funktionalgleichung

Dieses Kapitel behandelt die näherungsweise Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x) + \alpha f(f(x/\alpha)).$$

Einen besseren Weg zur Berechnung der Feigenbaumkonstanten eröffnet eine Funktionalgleichung, die Feigenbaum aufstellte (siehe [6] oder [13], Seite 290).

$$f(x) + \alpha f(f(x/\alpha)) = 0 \tag{4.4.1}$$

Neben der trivialen Lösung  $f(x) = -x$  nach [1] unendlich viele weitere Lösungen. Ich bin aber nur an der Lösung interessiert, die in der Nähe der von Feigenbaum angegebenen Näherung

$f(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 - 0.0267057x^6 + \dots$  liegt. Diese gestattet es,  $\alpha$  zu bestimmen.

Leider sind bislang nur Näherungsverfahren bekannt, um diese Gleichung zu lösen.

$f(x)$  ist offenbar durch Gleichung (4.4.1) nicht eindeutig bestimmt. So ist  $\tilde{f}(x) = k * f(x/k)$  offenbar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, wenn  $f(x)$  Lösung ist. Man kann also noch eine zusätzliche Festlegung treffen. Üblicherweise nimmt man die Normierungsbedingung

$$f(0) = 1$$

hinzu. Damit ergibt sich  $\alpha$  aus  $f$  durch Einsetzen von  $x = 0$  in (4.4.1) zu

$$\alpha = -1/f(1)$$

Damit läßt sich  $\alpha$  auch aus Gleichung (4.4.1) eliminieren, um nur noch  $f(x)$  als Unbekannte zu haben.

$$f(x) - \frac{f(f(x)f(1)))}{f(1)} = 0 \quad (4.4.2)$$

Um eine derartige Gleichung zu lösen, muß man einen Weg finden,  $f(x)$  darzustellen. Zunächst bietet sich dafür eine Taylorentwicklung an. Da  $f(x)$  gerade ist, kommen in der Taylorreihe nur die geraden Potenzen vor.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} \quad (4.4.3)$$

Bei der tatsächlichen Lösung wird  $f(x)$  durch ein endliches Anfangsstück dieser Reihe angenähert:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k} \quad (4.4.4)$$

Es gibt allerdings auch andere Möglichkeiten, wie in Abschnitt 4.2 auf der nächsten Seite beschrieben.

Im folgenden werden nun verschiedene Möglichkeiten, das Gleichungssystem (4.4.1), (4), (4) zu lösen, dargestellt.

## 4.1 Gradientenabstieg

Da in der Gleichung (4.4.1) nur das Intervall  $(0, 1)$  von Interesse ist, kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\int_0^1 (f(x) + \alpha f(f(x/\alpha)))^2 dx = 0 \quad (4.4.5)$$

Dies ist äquivalent zur Ausgangsgleichung, da das Integral eines Quadrats nur dann Null sein kann, wenn der Integrand im Integrationsintervall verschwindet.

Wenn ich nun eine Näherung für  $f(x)$  in diese Gleichung einsetze, dann wird das Integral nicht verschwinden. Es ist aber ein sehr gutes Maß für die Güte der Näherung. Die Aufgabe, eine möglichst gute Näherung für

$f(x)$  zu finden, stellt sich nun als Minimierungsaufgabe dar: die Koeffizienten des Näherungspolynoms sind so zu bestimmen, daß das obige Integral<sup>1</sup> minimal wird. Dies ist eine Standardaufgabe, die sich zum Beispiel mit dem Gradientenabstiegsverfahren lösen läßt, was sich z.B. sehr leicht parallelisieren läßt.

Da sich die im nächsten Abschnitt dargestellte Methode als effizienter erwiesen hat, möchte ich hier nicht näher darauf eingehen.

## 4.2 Newtonverfahren

Wenn man  $f(x)$  durch ein Polynom  $n$ -ten Grades approximiert, dann enthält dieses Polynom  $n + 1$  Unbekannte. Um diese zu finden, braucht man  $n + 1$  Gleichungen. Aus der Gleichung (4.4.2) lassen sich nun leicht  $n + 1$  Gleichungen konstruieren, indem man für  $x$   $n + 1$  Werte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  einsetzt. Diese können im einfachsten Falle  $x_i = i/n$  für  $i = 0, \dots, n$  sein. Um die Genauigkeit zu verbessern kann man z.B. auch die Stützstellen der Gauß-Quadratur verwenden.

Man erhält also ein nichtlineares Gleichungssystem für  $a_0, a_1, \dots, a_k$ :

$$\tilde{f}(x_i) - \frac{\tilde{f}(\tilde{f}(x_i \tilde{f}(1)))}{\tilde{f}(1)} = 0 \quad \text{für } x = 0, 1, \dots, n \quad (4.4.6)$$

mit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k}$$

Für dessen Lösung bietet sich wieder das iterative Newton-Verfahren an. Die Formeln dafür sind in Anhang B auf Seite 25 zu finden.

Allgemeiner kann man  $f(x)$  mit Hilfe von  $n$  Basisfunktionen  $h_i(x)$  darstellen.

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k h_i(x) \quad (4.4.7)$$

---

<sup>1</sup>Das Integral läßt sich für ein gegebenes Näherungspolynom zwar exakt lösen, dies ist jedoch mit sehr hohem Aufwand verbunden, da für ein Näherungspolynom  $n$ -ten Grades der Integrand ein Polynom  $n^2$ -ten Grades ist. Es empfiehlt sich daher die Verwendung eines numerischen Quadraturverfahrens, wie der Simpson-Regel oder der Gauß-Quadratur (siehe [3] Seite 761ff.)

Die  $h_i(x)$  können hier, wie bisher, einfach die Potenzen  $x^{2^i}$  sein. Da das lineare Gleichungssystem, das beim Newton-Verfahren gelöst werden muß, dabei allerdings im Allgemeinen recht schlecht konditioniert ist (d.h. seine Lösung sehr anfällig für die Anhäufung von Rundungsfehlern ist), bietet es hier numerische Vorteile, wenn man statt dessen andere Basisfunktionen benutzt. Eine angemessene Wahl wären z.B. die Legendré-Polynome  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ([3] Seite 749ff.) mit den Nullstellen von  $P_{n+1}$  als Stützstellen, oder auch

$$1, \cos(2\pi * x), \cos(2\pi * 2x), \cos(2\pi * 3x), \dots, \cos(2\pi * nx).$$

Numerische Experimente zeigten, daß sich als Basisfunktionen

$$h_i(x) = B_i^n(x^2)$$

mit den Stützstellen

$$x_i = \sqrt{i/n} \quad \text{für} \quad i = 0 \dots n$$

sehr gut eignen, wobei  $B_i^n$  die Bezierpolynome sind:

$$B_m^n = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$



## 5. Die zweidimensionale Funktionalgleichung

*In diesem Kapitel werden aus der in [10] angegebenen 2-dimensionalen Variante der Funktionalgleichung zwei eindimensionale Funktionalgleichungen konstruiert, und damit ein neuer Weg zur Berechnung von  $\delta$  eröffnet.*

Offenbar läßt sich mit Hilfe der in Kapitel 4 angegebenen Funktionalgleichung nur  $\alpha$  direkt berechnen. Feigenbaum fand eine Methode, die  $\delta$  als größten Eigenwert der Linearisierung eines aus dieser Gleichung konstruierten Operators darstellt. Dies benutzte auch Keith Briggs in der bisher genauesten Berechnung von  $\alpha$  und  $\delta$  (publiziert in [2]).

In [10] u.a. läßt sich jedoch eine 2-dimensionale Variante der Gleichung finden, die sowohl  $\alpha$ , als auch  $\delta$  enthält:

$$g(x, p) = -\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}, 1 + \frac{p}{\delta}\right), 1 + \frac{p}{\delta}\right) \quad (5.5.1)$$

Um diese Gleichung zu lösen, kann man analog zu der Vorgehensweise im vorhergehenden Kapitel die Funktion  $g(x, p)$  durch ein endliches Anfangsstück seiner Taylorreihe approximieren:

$$g(x, p) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n a_{kl} x^k p^l$$

Auf diese Weise versuchten Vul und Chanin in [14], sowie Goldberg et. al. in [8] die Feigenbaumkonstanten auszurechnen. Dies ist allerdings für höhere Genauigkeiten sehr aufwendig, da eine Approximation bis zum Grad  $n$  bereits  $n^2$  Terme benötigt.

Dies läßt sich jedoch vermeiden, da man die Gleichung (5.5.1) in 2 separate eindimensionale Funktionalgleichungen zerlegen kann. Dies geschieht wie folgt: Man setzt zunächst  $p = y + \frac{\delta}{\delta-1}$  ein, und verwende, daß  $g(x, y)$  bezüglich  $x$  gerade ist (d.h.  $g(x, y) = g(-x, y)$ ), und erhalte

$$g(x, y + \frac{\delta}{\delta-1}) = -\alpha g(g(x/\alpha), \frac{y}{\delta} + \frac{\delta}{\delta-1}), \frac{y}{\delta} + \frac{\delta}{\delta-1}$$

Man führt nun die neue Funktion  $f(x, y) = g(x, y + \frac{\delta}{\delta-1})$  ein, und erhält die einfachere Form:

$$f(x, y) = -\alpha f(f(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\delta}), \frac{y}{\delta}) \quad (5.5.2)$$

Wenn man nun  $y = 0$  setzt, dann erhält man die schon bekannte Gleichung (4.4.1) in etwas anderer Schreibweise:

$$f(x, 0) = -\alpha f(f(\frac{x}{\alpha}, 0), 0)$$

Eine zweite Gleichung erhält man durch Ableitung der Gleichung (5.5.2) nach  $y$ , und nachfolgendem Einsetzen von  $y=0$ .

$$f_y(x, y) = -\alpha \frac{f_y(f(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\delta}), \frac{y}{\delta}) + f_x(f(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\delta}), \frac{y}{\delta}) f_y(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\delta})}{\delta}$$

$$f_y(x, 0) = -\frac{\alpha}{\delta} (f_y(f(\frac{x}{\alpha}, 0), 0) + f_x(f(\frac{x}{\alpha}, 0), 0) f_y(\frac{x}{\alpha}, 0))$$

Hierbei bezeichnen  $f_x$  und  $f_y$  jeweils die Ableitung von  $f$  nach dem ersten bzw. nach dem zweiten Argument.

Durch Umbenennung von  $f(x, 0)$  in  $f(x)$  (damit wird  $f_x(x, 0)$  zu  $f'(x)$ ) und von  $f_y(x, 0)$  in  $g(x)$  erhalte ich damit die folgenden Gleichungen:

$$f(x) = -\alpha f(f(\frac{x}{\alpha})) \quad (5.5.3a)$$

$$g(x) = -\frac{\alpha}{\delta} \left( g(f(\frac{x}{\alpha})) + f'(f(\frac{x}{\alpha})) g(\frac{x}{\alpha}) \right) \quad (5.5.3b)$$

Auch hier sind  $f(x)$  und  $g(x)$  durch diese Gleichungen noch nicht eindeutig festgelegt, so daß man zusätzlich die Normierungsbedingungen

$$f(0) = 1 \quad (5.5.3c)$$

$$g(0) = 1 \quad (5.5.3d)$$

hinzunehmen kann.

Aus diesen Gleichungen kann man wieder  $\alpha$  und  $\delta$  eliminieren, um  $f(x)$  und  $g(x)$  als einzige Unbekannte in der Gleichung zu haben. Durch Einsetzen von  $x = 0$  ergibt sich aus (5.5.3a) und (5.5.3c) wieder

$$\alpha = -1/f(1) \tag{5.5.4}$$

und durch Einsetzen von  $x = 0$  in (5.5.3a) erhält man:

$$g(0) = -\frac{\alpha}{\delta} (g(f(0)) + f'(f(0))g(0))$$

$$1 = -\frac{\alpha}{\delta} (g(1) + f'(1))$$

und damit

$$\delta = -\alpha(g(1) + f'(1)) \tag{5.5.5}$$

Wenn man (5.5.4) und (5.5.5) in (5.5.3a) und (5.5.3b) einsetzt, erhält man folgende Funktionalgleichungen, die es zu lösen gilt:

$$f(0) = 1 \tag{5.5.6a}$$

$$f(x) - \frac{f(f(x)f(1))}{f(1)} = 0 \tag{5.5.6b}$$

$$g(0) = 1 \tag{5.5.6c}$$

$$g(x) = \frac{g(f(\frac{x}{\alpha})) + f'(f(\frac{x}{\alpha}))g(\frac{x}{\alpha})}{g(1) + f'(1)} \tag{5.5.6d}$$

Offenbar kann man zunächst  $f(x)$  näherungsweise berechnen, wie schon in Kapitel 4, und dann daraus  $g(x)$  auf analoge Weise. Mit Hilfe von (5.5.4) und (5.5.5) erhält man daraus die gesuchten Konstanten  $\alpha$  und  $\delta$ .

## 6. Beschreibung der Implementation der Berechnung und Resultate

Die in Kapiteln 4 und 5 bzw. B beschriebenen Lösungsmethoden wurden mit Hilfe der Programmiersprache Sather und der GNU MP Library (einer Bibliothek für Arithmetik mit beliebig großen ganzen Zahlen) implementiert. Da das lineare Gleichungssystem beim Newtonverfahren bei Lösung mit voller Genauigkeit viel zu groß und zu aufwendig geworden wäre, wurde es mit normaler 16-stelliger Arithmetik gelöst. Dies vervielfacht allerdings die Zahl der notwendigen Iterationen.

Die Rechnung wurde mit steigender Genauigkeit mehrfach wiederholt. Das Ergebnis bilden die 435 Stellen, die zwischen der vorletzten und letzten Rechnung (Genauigkeit 770 Dezimalstellen, Polynomgrad 640) übereinstimmen. Die Resultate sind auf der nächsten Seite angegeben.

$\alpha =$  2.5029078750 9589282228 3902873218 2157863812 7137672714 9977336192  
0567792354 6317959020 6703299649 7464338341 2959523186 9995854723  
9421823777 8544517927 2863314993 3725781121 6359487950 3744781260  
9973805986 7123971173 7328927665 4044010306 6983138346 0009413932  
2364490657 8899512205 8431725078 7337746308 7853424285 3519885875  
0004235824 6918740820 4281700901 7148230518 2162161941 3199856066  
1293827426 4970984408 4470100805 4549677936 7608881264 4640688518  
1552709324 00754

$\delta =$  4.6692016091 0299067185 3203820466 2016172581 8557747576 8632745651  
3430041343 3021131473 7138689744 0239480138 1716598485 5189815134  
4086271420 2793252231 2442988890 8908599449 3546323671 3411532481  
7142199474 5564436582 3793202009 5610583305 7545861765 2222070385  
4106467494 9428498145 3391726200 5687556659 5233987560 3825637225  
6480040951 0712838906 1184470277 5854285419 8011134401 7500242858  
5382498335 7155220522 3608725029 1678860362 6745272133 9905713160  
6875345083 43393

# A. Das Newtonverfahren bei der Berechnung von Bifurkationspunkten

Das zweidimensionale Newtonverfahren setzt zur Lösung eines Gleichungssystems

$F(x, a) = 0$  und  $G(x, a) = 0$  folgende Iterationsformel ein:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ a_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x(x_i, a_i) & F_a(x_i, a_i) \\ G_x(x_i, a_i) & G_a(x_i, a_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F(x_i, a_i) \\ G(x_i, a_i) \end{pmatrix}$$

Um dieses Verfahren auf die Gleichungen (3.3.1) und (3.3.2) anzuwenden, muß ich in dieser Formel die Funktionen

$$\begin{aligned} F(x, a) &= f^{2^n}(x, a) - x \\ G(x, a) &= f_x^{2^n}(x, a) + 1 \end{aligned}$$

einsetzen. Zur Berechnung der Ableitungen

$$\begin{aligned} F_x(x, a) &= f_x^{2^n}(x, a) - 1 \\ F_a(x, a) &= f_a^{2^n}(x, a) \\ G_x(x, a) &= f_{xa}^{2^n}(x, a) \\ G_a(x, a) &= f_{xa}^{2^n}(x, a) \end{aligned}$$

benötigt man noch die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x} f^{2^n}$ ,  $\frac{\partial}{\partial a} f^{2^n}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f^{2^n}$  und  $f_{xa}^{2^n}$ . Diese kann man aus den Rekursionsgleichungen für  $f^{2^n}$  ableiten:

$$f^i(x, a) = \begin{cases} x & \text{wenn } i = 0 \\ f(f^{i-1}(x, a), a) & \text{wenn } i > 0 \end{cases} \quad (\text{A.A.1})$$

Damit ergeben sich die Ableitungen für den Fall  $i = 0$  zu

$$\begin{aligned} f_x^0(x, a) &= 1 \\ f_a^0(x, a) &= f_x^0 x(x, a) = f_x^0 a(x, a) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.A.2})$$

und für den Fall  $i \neq 0$  zu

$$\begin{aligned} f_x^{i+1}(x, a) &= f_x(f^i(x, a), a) f_x^i(x, a) \\ f_{xx}^{i+1}(x, a) &= f_{xx}(f^i(x, a), a) f_x^i(x, a) + f_x(f^i(x, a), a) f_{xx}^i(x, a) \\ f_{xa}^{i+1}(x, a) &= f_{xa}(f^i(x, a), a) f_x^i(x, a) + f_x(f^i(x, a), a) f_{xa}^i(x, a) \end{aligned} \quad (\text{A.A.3})$$

Aus (A.A.1) ergeben sich:

$$\begin{aligned} f_x(x, a) &= -2ax + a \\ f_{xx}(x, a) &= -2a \\ f_{xa}(x, a) &= -2x + 1 \end{aligned} \quad (\text{A.A.4})$$

Zur Beschleunigung des Rechenvorgangs ist es aber empfehlenswert, eine Koordinatentransformation auszuführen. Ich ersetze in  $x_{i+1} = f(x_i, a) = ax_i(1 - x_i)$  zunächst  $x$  durch  $(\tilde{x}/a + 1/2)$  und erhalte

$$\frac{\tilde{x}_{i+1}}{a} + \frac{1}{2} = a \left( \frac{\tilde{x}}{a} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \left( \frac{\tilde{x}}{a} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}_{i+1}}{a} + \frac{1}{2} &= \frac{a}{4} - \frac{\tilde{x}^2}{a} \\ \tilde{x}_{i+1} &= \frac{a^2 - 2a}{4} - \tilde{x}_i^2 \end{aligned}$$

und mit  $\tilde{a} = \frac{a}{4}$  erhält man die neue Rekursionsgleichung:

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{a}) = \tilde{a} - \tilde{x}_i^2 \quad (\text{A.A.5})$$

Damit ergeben sich die folgenden Ableitungen, die im Vergleich zu (A.A.4) einfacher sind, und damit zu einem geringeren Rechenaufwand führen:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_x(\tilde{x}, \tilde{a}) &= -2\tilde{x} \\ \tilde{f}_{xx}(\tilde{x}, \tilde{a}) &= -2 \\ \tilde{f}_{xa}(\tilde{x}, \tilde{a}) &= 0\end{aligned}\tag{A.A.6}$$



# B. Das Newtonverfahren für die Lösung der Funktionalgleichung I

Dieses Kapitel beschreibt die angenäherte Lösung der Funktionalgleichung  $f(x) - \frac{f(xf(1))}{f(1)} = 0$  aus Kapitel 4 mit Hilfe des Newtonverfahrens. Die Lösung der Funktionalgleichung  $g(x) = -\frac{\alpha}{\delta} (g(f(\frac{x}{\alpha})) + f'(f(\frac{x}{\alpha}))g(\frac{x}{\alpha}))$  aus Kapitel 5 erfolgt analog.

Zu lösen ist das Gleichungssystem (4.4.6):

$$\tilde{f}(x_i) - \frac{\tilde{f}(\tilde{f}(x_i \tilde{f}(1)))}{\tilde{f}(1)} = 0 \quad \text{für } x = 0, 1, \dots, n \quad (4.4.6)$$

mit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k h_k(x)$$

$x_i$  und  $h_i(x)$  entsprechen Gleichung (4.4.8) auf Seite 16.

Ich bezeichne die linke Seite von Gleichung (4.4.6) im folgenden mit  $F_i$ . Ein Iterationsschritt sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a_0} F_0 & \frac{\partial}{\partial a_1} F_0 & \dots & \frac{\partial}{\partial a_n} F_0 \\ \frac{\partial}{\partial a_0} F_1 & \frac{\partial}{\partial a_1} F_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial a_n} F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial a_0} F_n & \frac{\partial}{\partial a_1} F_n & \dots & \frac{\partial}{\partial a_n} F_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.B.1})$$

Um den Iterationsschritt auszuführen, sind noch die  $\frac{\partial}{\partial a_i} F_j$  zu berechnen.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} F_j = \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \tilde{f}(x_i) - \frac{\tilde{f}(\tilde{f}(x_i \tilde{f}(1)))}{\tilde{f}(1)} \right) \quad (\text{B.B.2})$$

mit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k h_k(x)$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, benutze ich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \tilde{f}(x) &= \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=0}^n a_k h_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\partial}{\partial a_i} (a_k h_k(x)) \end{aligned}$$

und mit  $\frac{\partial}{\partial a_i} (a_k h_k(x)) = \begin{cases} a_k h'_k(x) \left( \frac{\partial}{\partial a_i} x \right) + h_k(x) & \text{für } k = i \\ a_k h'_k(x) \left( \frac{\partial}{\partial a_i} x \right) & \text{für } k \neq i \end{cases}$  folgt:

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_{k=0}^n a_k h'_k(x) \left( \frac{\partial}{\partial a_i} x \right) \right) + h_i(x) \\ \frac{\partial}{\partial a_i} \tilde{f}(x) &= \tilde{f}'(x) \left( \frac{\partial}{\partial a_i} x \right) + h_i(x) \end{aligned}$$

Wenn man dies nun auf (B.B.2) anwendet, so erhält man über eine Reihe von Ableitungsschritten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \tilde{f}(x) &= \frac{\tilde{f}(\tilde{f}(x \tilde{f}(1))) h_i(1)}{\tilde{f}(1)^2} + h_i(x) \\ &\quad - \frac{h_i(\tilde{f}(x \tilde{f}(1))) + \left( h_i(x \tilde{f}(1)) + x h_i(1) \tilde{f}'(x \tilde{f}(1)) \right) \tilde{f}'(\tilde{f}(x \tilde{f}(1)))}{\tilde{f}(1)} \end{aligned} \quad (\text{B.B.3})$$

Damit sind alle nötigen Formeln für die Iteration beisammen.



# Literaturverzeichnis

- [1] BRIGGS, QUISPEL und THOMPSON: *Feigenvalues for Mandelsets*. Mathematics Research Paper 91-5, La Trobe University, Bundoora, Victoria, Australia, May 31 1995.
- [2] BRIGGS, KEITH: *A precise calculation of the feigenbaum constants*. Mathematics of Computation, 57(195):435–439, 6 1991.
- [3] BRONSTEIN und SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Nauka, Moskau und Teubner, Leipzig, 22 Auflage, 1985.
- [4] CHRISTIANSEN, F., P. CVITANOVIĆ und H. H. RUGH: *The spectrum of the period-doubling operator in terms of cycles*. J. Phys. A, (23):L713–L717, 1990.
- [5] FEIGENBAUM, M. J.: *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. Journal of statistic physics, (19):25, 1978.
- [6] FEIGENBAUM, M. J.: *The universal metric properties of nonlinear transformations*. Journal of statistic physics, (21):669–706, 1979.
- [7] FEIGENBAUM, M. J.: *The metric universal properties of period doubling transformations and the spectrum for a route to turbulence*. Annals of the New York Academy of Science, (357):330–336, 1980.
- [8] GOLDBERG, A. I., J. G. SINAI und K. M. KHANIN: *Universal properties of sequences of period triplings*. Usp. Mat. Nauk, 38:159, 1983.
- [9] HÄMMERLIN und HOFFMAN: *Numerische Mathematik*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 4 Auflage, 1994.
- [10] LEVEN, KOCH und POMPE: *Chaos in dissipativen Systemen*. Akademie Verlag Berlin, 2 Auflage, 1994.
- [11] PEITGEN, HEINZ-OTTO, HARTMUT JÜRGENS und DIETMAR SAUPE: *Chaos and Fractals: new frontiers of science*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1992.
- [12] SCHÖNHAGE, GROTEFELD, VETTER: *Fast Algorithms*. Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- [13] SCHROEDER, MANFRED: *Fraktale Chaos und Selbstähnlichkeit; Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit*. Spektrum Akademie Verlag Heidelberg, 1994.
- [14] VUL und CHANIN: *On the unstable manifold of Feigenbaum fixed point*. Usp. Mat. Nauk, (37):137, 1982.

# Index

$\alpha$ , 5

$\delta$ , 4

Bifurkationen, 4

Feigenbaumkonstante, 4–6

Funktionalgleichung I, 13

Funktionalgleichung II, 17

logistische Gleichung, 3

Periodenverdopplung, 4

Rekursion, *siehe* Rekursion

superstabile Zyklen, 5

Universalität der Feigenbaumkon-  
stante, 7